How hard is it to organize a white elephant?

December 8, 2022

◆□▶ ◆□▶ ◆ 臣▶ ◆ 臣▶ ○ 臣 ○ の Q @

The game

- $\pi \in \mathfrak{B}_n$ is a derangement $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \pi(i) \neq i \quad \forall i$
- Example: (1,2,3)(4,5)(6,7,8)

Elise, Tara, Anastasia, and Kaelyn pick $\pi \in \mathfrak{S}_n$ uniformly at random to describe who gives which talks. What is the probability no one gives their own talk?

・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・

#{derangements in \Re_n } can be found using inclusion-exclusion.

The number of permutations with at least *i*-many fixed points is (n-i)!, by picking a permutation of the remaining points which aren't fixed.

Thus, the number of derangements is

$$D(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} i!$$

・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・

D(n) is the nearest integer to n!/e

・ロト・日本・ヨト・ヨー うへの

WHY?!?

D(n) is an approximation of $n!e^{-1}$ to order n.

(ロ)、(型)、(E)、(E)、(E)、(O)へ(C)

We'll show the error
$$\left|\frac{n!}{e} - D(n)\right| < \frac{1}{2}$$
.

Let
$$e^x = \sum_{i \ge 0} rac{x^i}{i!}.$$
 Then $e^x = T_n(x) + R_n(x)$

where T_n is a Taylor polynomial of order n and R_n is the error. Thus,

$$D(n)=n!T_n(-1).$$

The alternating series remainder estimate tells us that

$$|R_n(-1)| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

We have

$$\frac{n!}{e} = n! (T_n(-1) + R_n(-1)) = D(n) + n!R_n(-1)$$

SO

$$\left|\frac{n!}{e} - D(n)\right| = n! |R_n(-1)|$$
$$\leq n! \frac{1}{(n+1)!}$$
$$= \frac{1}{n+1}$$
$$\leq \frac{1}{2}$$

The probability no one gives their own talk is

$$\frac{[n!/e]}{n!}$$

where [n!/e] means round to the nearest integer. For example:

$$rac{[8!/e]}{8!} = rac{14833}{40320} pprox 0.3678$$

As $n \to \infty$, we have $\mathbb{P}(\pi \in \bigotimes_n \text{ is a derangement}) \to \frac{1}{e}$.

In conclusion

How hard is it to organize a white elephant?

In conclusion

How hard is it to organize a white elephant?

Kinda hard.